5M

УДК 681.3.06:518.12

В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева
ОАО «Элемент», г. Одесса, Украина
odessa@element.od.ua

Дискретные аналоги интегральных уравнений Вольтерра II рода

Предлагается класс математических моделей процессов в линейных системах с фиксированными состояниями. Такие математические модели являются дискретными аналогами интегральных уравнений Вольтерра II рода. Рассмотрены методы аналитического решения предложенных уравнений на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту. Рассмотрена и доказана теорема, устанавливающая аналитический вид резольвенты по заданному ядру для ряда важных частных случаев, а именно при сепарабельном виде ядра. Рассмотрены эквивалентные преобразования предложенных математических моделей к линейным разностным уравнениям.

Введение

Проблема исследования управляемого изменения состояния сложных динамических систем в настоящее время решается путем построения их математических моделей (ММ), как правило, в виде моделей пространства состояний, как отвечающих в наибольшей степени методам и средствам современной теории управления. Однако далеко не все процессы в реальных объектах управления могут быть описаны указанными математическими моделями пространства состояния (ММПС), что требует отыскания новых форм математического описания их движения.

Важная научно-прикладная задача состоит в отыскании таких форм ММ, которые при сохранении адекватности реальным процессам позволили бы осуществить их численную реализацию.

Известные преимущества интегральных моделей, в частности интегральных уравнений Вольтерра II рода, предопределяет необходимость и практическую значимость рассмотрения методов отыскания различных форм их аналитических решений, на основе решения соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

1 Постановка проблемы и цель исследования

Теоретические основы решения интегральных уравнений рассмотрены в ряде фундаментальных работ [1-3]. Методы и алгоритмы их численного решения предложены в справочной литературе [3], [4]. Особенности интегро-дифференциальных уравнений и программные средства их решения изложены в [5], [6]. Для отдельных частных случаев интегральных уравнений в [1-3] предлагаются также некоторые аналитические решения. В [7], [8] предложены такие решения для ряда важных прикладных задач.

В то же время необходимость численной реализации ММ непосредственно в составе систем управления требует систематического рассмотрения вопросов отыскания решений интегральных уравнений и их дискретных аналогов, применяемых в качестве математических моделей исследуемых объектов. В первую очередь это

касается интегральных уравнений Вольтерра II рода, имеющих широкую область применения в прикладных задачах и для которых разработаны эффективные методы численного решения [3].

Целью настоящей работы является разработка методов аналитического решения дискретных аналогов интегральных уравнений Вольтерра II рода на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту.

2 Основные результаты исследования

Интегральное уравнение Вольтерра II рода

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,s)\,y(s)\,ds, \tag{1}$$

где $y(x)$ – неизвестная, $f(x)$ – функция, удовлетворяющая ограничению

$$\left|\int_a^x f(x)\,dx\right| < C_1, \quad C_1 = const,$$

$K(x,s)$ – ядро, непрерывное в пределах треугольника $x \ge a, s \le b, x = s.b > a$,

x, s – независимые переменные, a = const, имеет следующее решение в аналитическом виде

$$y(x) = f(x) + \int_a^x r(x,s)\,f(s)\,ds, \tag{2}$$

где $r(x,s)$ – резольвента, удовлетворяющая уравнению

$$r(x,s) = k(x,s) + \int_a^x k(x,t)\,r(t,s)\,dt, \tag{3}$$

Известные [1-3] условия существования и единственности решения уравнения (1) заключаются в непрерывности ядра $K(x,s)$ на сторонах и внутри треугольника $x \ge a, s \le b, x = s.b > a$, а также в условиях ограниченности функции $f(x)$.

Решение уравнения для резольвенты (3) имеет важное значение как для теории интегральных уравнений, так и для прикладных задач, поскольку отыскание резольвенты по известному ядру из (3) предоставляет возможность решить тем самым целый класс интегральных уравнений Вольтерра II рода с различными правыми частями в виде функций $f(x)$.

Рассмотрим дискретный аналог уравнения (1)

$$y(x_n) = f(x_n) + \sum_{j=x_1}^{x_n} K(x_n, s_j)\,y(s_j), \tag{4}$$

где $n, j \in N,\ j \le n.$

Уравнение (4) может рассматриваться, с одной стороны, как приближенная квадратурная реализация уравнения (1). С другой стороны, (4) может использоваться как математическая модель процессов в системах с дискретными состояниями, например, в цифровых системах управления, моделирования потока отказов, отражения сигнала от дискретных рассеивателей и др. В первом случае нахождение аналитического решения (4) позволяет избежать известных проблем численного решения уравнений с переменным верхним пределом. Во втором случае нахождение решений уравнений

вида (4) имеет важное самостоятельное значение, поскольку дает возможность построить алгоритмы нерекурсивного типа, соответствующие требованиям реального времени. В последующем (4) будет определяться как Σ-уравнение.

Будем полагать далее, что справедливы следующие условия

$$\left|\sum_{x_i=x_1}^{x_n} f\left(x_i\right)\right| \le C_2,\ C_2 = const \tag{5}$$

$$r\left(x_n, s_j\right) - r\left(x_{n-1}, s_j\right) \le C_3,\ \ C_3 = const \tag{6}$$

$$r\left(x_n, s_j\right) - r\left(x_n, s_{j-1}\right) \le C_4,\ \ C_4 = const \tag{7}$$

В дальнейшем переменные-аргументы опускаются и используются следующие обозначения

$$r\left(x_n, s_j\right) = r_{nj},$$

$$y\left(x_n\right) = y_n,\ \ f\left(x_n\right) = f_n$$

Решение уравнения (1) будем отыскивать по аналогии с (2) в форме

$$y_n = f_n + \sum_{j=1}^{n} r_{nj} f_j, \tag{8}$$

Из (4) и (8) следует уравнение для резольвенты

$$r_{kj} = k_{kj} + \sum_{i=j-1}^{n} k_{kj} \cdot r_{ij} \tag{9}$$

Вывод уравнения (9) может быть получен следующим образом

$$\sum_{s_j=x_1}^{x_n} r\left(x_n, s_j\right) f\left(s_j\right) = \sum_{s_j=x_1}^{x_n} k\left(x_n, s_j\right) y\left(s_j\right) =$$

$$= \sum_{s_j=x_1}^{x_n} k\left(x_n, s_j\right) f\left(s_j\right) + \sum_{v_i=x_1}^{x_n} f\left(v_i\right) \sum_{s_j=v_2}^{x_n} k\left(x_n, s_j\right) r\left(s_j, v_i\right) =$$

$$= \sum_{s_j=x_1}^{x_n} k\left(x_n, s_j\right) f\left(s_j\right) + \sum_{s_j=x_1}^{x_n} f\left(s_j\right) \left[\sum_{v_i=s_j}^{x_n} k\left(x_n, v_i\right) r\left(v_i, s_j\right)\right]$$

С учетом (5) из последнего соотношения следует (9).

Для исследования свойств и нахождения решений Σ-уравнения типа Вольтерра рассмотрим первоначально следующую Лемму.

Лемма. Для однородного Σ-уравнения Вольтерра II рода решением является 0-последовательность.

Действительно, для уравнения

$$y_n = \sum_{j=1}^{n} k_{nj} y_j$$

решение есть

$$y_n = 0,\ \ \forall n \in N,$$

что непосредственно следует из (8) при $f_n = 0,\ \ \forall n \in N$.

Решения уравнения для резольвенты (9) устанавливает следующая теорема.

Теорема. Если ядро является разделяющимся (сепарабельным) и имеет вид

$$k_{nj} = \vec{\alpha}_n^T \vec{\beta}_j, \tag{11}$$

где $\vec{\alpha}_n = col(\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, ..., \alpha_{nm})$, $\vec{\beta}_j = col(\beta_{j1}, \beta_{j2}, ..., \beta_{jm})$ и справедливы условия (5 – 7), то решением уравнения для резольвенты является решетчатая функция

$$r_{nj} = \vec{\alpha}_n^T F_{nj} \vec{\beta}_j, \tag{12}$$

где матрица F_{nj} определяется из соотношения

$$F_{nj} = \prod_{i=j}^{n} \left(E - \vec{\beta}_i \vec{\alpha}_i^T \right)^{-1}. \tag{13}$$

Необходимость. Прямой подстановкой (12) в (9) получаем

$$F_{nj} = F_{n-1,j} + \vec{\beta}_n \vec{\alpha}_n^T F_{nj}, \tag{14}$$

Откуда непосредственно следует (12) и (13).

Достаточность. Пусть (9) имеет два решения

$$r_{nj}^{(1)} = k_{nj} + \sum_{i=j-1}^{n} k_{ni} r_{ij}^{(1)},$$

$$r_{nj}^{(2)} = k_{nj} + \sum_{i=j-1}^{n} k_{ni} r_{ij}^{(2)},$$

тогда

$$r_{nj}^{(1)} - r_{nj}^{(2)} = \Delta r_{nj} = \sum_{i=j-1}^{n} k_{ni} \Delta r_{ij}. \tag{15}$$

Уравнение (15) является однородным уравнением и согласно Лемме имеет нулевое решение по координате x_n.

Рассмотрим решение по координате s_i. Пусть $n = 1$, тогда $\Delta r_{ij} = k_{ij} \Delta r_{ij}$, отсюда $\Delta r_{ij} = 0$.

Далее получаем

$$\Delta r_{nj} = \Delta r_{n-1,j} + k_{nn} \Delta r_{nj},$$

$$\Delta r_{n+1,j} = \Delta r_{n,j} + k_{n+1,n} \Delta r_{n+1,j}.$$

В предположении, что $\Delta r_{nj} = 0$, следует $\Delta r_{n+1,j} = 0.$ По индукции устанавливаем $\Delta r_{nj} = 0$. Следовательно, решение (9) единственно и определяется (12) и (13).

Следствие. Если k_{nj}^* и r_{nj}^* – ядро и резольвента уравнения (9), то $k_{nj} = \varphi_j k_{nj}^*$ и $r_{nj} = \varphi_n k_{nj}^*$ также являются решением (9) при $\varphi_n \neq 0, \ \forall n \in N$.

Рассмотрим Σ -уравнение Вольтерра II рода с разделяющимся ядром:

$$y_n = f_n + \alpha_n \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j. \tag{16}$$

Обозначая

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j, \tag{17}$$

получаем следующее разностное уравнение, эквивалентное (16) при нулевых начальных условиях

$$v_n = \beta_n \left(\alpha_n v_n + f_n \right) + v_{n-1}. \tag{18}$$

Из (16) и (18) следует дискретная математическая модель

$$\begin{cases} v_n = \dfrac{1}{1-\alpha_n\beta_n} v_{n-1} + \dfrac{\beta_1}{1-\alpha_n\beta_n} f_n, \\ y_n = \alpha_n v_n + f_n \end{cases} \tag{19}$$

с решением

$$y_n = f_n + \alpha_n \sum_{j=1}^{n} F_{nj}\beta_j f_j, \tag{20}$$

где

$$F_{nj} = \prod_{i=j}^{n}\left(1-\alpha_i\beta_j\right)^{-1}. \tag{21}$$

Рассмотрим более сложное, по сравнению с (16), Σ-уравнение Вольтерра II рода с разделяющимся ядром

$$y_n = f_n + \vec{\alpha}_n^T \sum_{j=1}^{n} \vec{\beta}_j y_j. \tag{22}$$

Обозначим

$$\vec{v}_n = \sum_{j=1}^{n} \vec{\beta}_j y_j.$$

Отсюда следует дискретная математическая модель пространства состояний в виде

$$\begin{cases} \vec{v}_n = \left(E-\vec{\beta}_n\vec{\alpha}_n^T\right)^{-1} \vec{v}_{n-1} + \left(E-\vec{\beta}_n\vec{\alpha}_n^T\right)^{-1} \vec{\beta}_n f_n, \\ \vec{y}_n = \vec{\alpha}_n^T \vec{v}_n + f_n. \end{cases} \tag{24}$$

фундаментальная матрица которой имеет вид

$$\Phi_{nj} = \left(E-\vec{\beta}_n\vec{\alpha}_n^T\right)^{-1}, \quad F_{nj} = \prod_{i=j}^{n}\Phi_{ii}.$$

Решение системы (24) определяется соотношением

$$y_n = f_n + \vec{\alpha}_n^T \sum_{j=1}^{n} F_{nj}\vec{\beta}_j f_j.$$

В силу эквивалентности (22) и (24), это решение одновременно является решением Σ-уравнение Вольтерра II рода с разделяющимся ядром.

Возможности предлагаемого подхода иллюстрируют следующие примеры.

Пример 1. Пусть ядро в уравнении (16) задано в виде

$$k_{nj} = \frac{a-1}{a} a^{-n} a^{j}.$$

Используя результат доказанной теоремы, получаем резольвенту

$$r_{nj} = a-1.$$

При задании «правой части» следующей решетчатой функцией

$$f_n = k \cdot r^{-n}$$

получаем решение в виде: $y_n = 1,\ \forall k \in N$.

Настоящий пример является дискретным аналогом уравнения, рассмотренного в [3] с тем же решением, полученным методом квадратур.

Пример 2. Пусть ядро в уравнении (16) задано в виде

$$k_{nj} = -\left(a-1\right)a^{-n}a^{j} = \left(1-a\right)a^{-(n-j)}.$$

На основании установленных аналитических результатов получаем резольвенту

$$F_{nj} = a^{-n+j-1} = a^{-(n-j)} \cdot a^{-1}$$

$$r_{nj} = (1-a)a^{-2n}a^{2i} / a = \frac{1-a}{a} a^{-2(n-j)}$$

При задании «правой части» следующей решетчатой функцией

$$f_n = k \cdot a^{-n}$$

получаем следующее решение: $y_n = a^{-2nk}$.

Пример 3. В условиях примера 2

$$k_{nj} = (1-a)a^{-n}a^{j},$$

$$r_{nj} = (1-a)a^{-2n}a^{2j} / a,$$

зададим другой вид «правой части»: $f_n = 1$. В этом случае решение имеет вид:

$$y_n = 1 - \frac{a}{a+1}\left(1 - a^{-2n}\right).$$

Последний пример иллюстрирует важное достоинство резольвентного решения: могут быть получены решения классов Σ-интегральных уравнений с различными «правыми частями». На рис. 1 и рис. 2 представлены ядро и резольвента для a = 2.

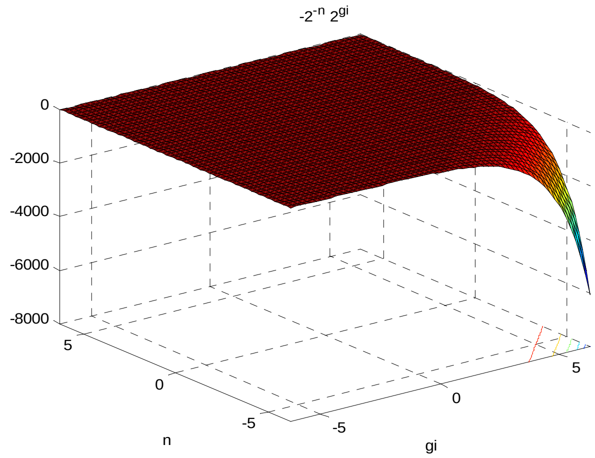


Рисунок 1 – Разностное ядро для примера 3

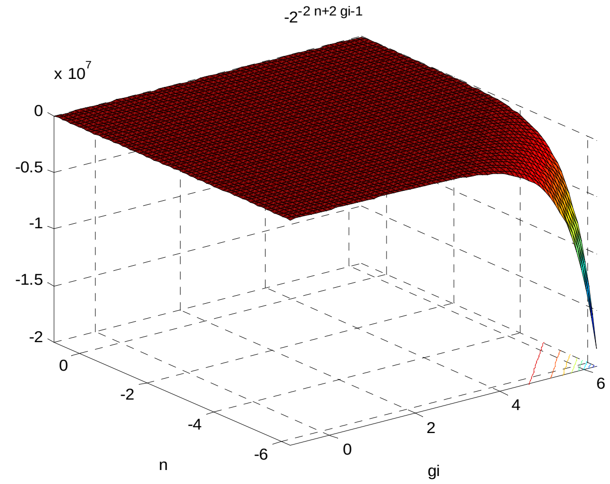


Рисунок 2 – Резольвента для примера 3

Если $k_{nj} = k_{n-j}$ – разностное ядро, то в силу линейности Σ-интегрального уравнения $r_{nj} = r_{n-j}$ – резольвента также является разностной. Отсюда уравнение для резольвенты имеет вид

$$r_{n-j} = k_{n-j} + \sum_{i=j-1}^{n} k_{n-i} r_{i-j} \,. \quad (25)$$

Полагая, что r_s и k_s удовлетворяют условиям существования их z-преобразований, где $s = n - j$, из (25) следует операторное уравнение:

$$R(z) = K(z) + K(z) R(z), \quad (26)$$

где $R(z), K(z)$ – z-изображения ядра и резольвенты соответственно. Отсюда следует аналитическое решение уравнения для резольвенты в виде

$$r_s = Z^{-1}\{R(z)\}, \quad (27)$$

где

$$R(z) = \frac{K(z)}{1 - K(z)}. \quad (28)$$

Решение (27) и (28) обобщают операционный метод решения интегрального уравнения Вольтерра II рода с разностным ядром на соответствующие Σ-уравнения.

Пример 4. Пусть

$$k_{nj} = k_{n-j} = a, \; r_{nj} = r_{n-j} = n(1-a)^{-n+j-1}. \quad (29)$$

Определим изображение ядра

$$K(z) = a \frac{z}{z-1}.$$

Согласно (28) получим изображение резольвенты

$$R(z) = \frac{az - 1}{(1-a)z - 1} = \frac{a}{1-a} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{1-a}},$$

Используя обратное преобразование, получим окончательный результат

$$Z^{-1}\{R(z)\} = \frac{a}{1-a} \cdot \left(\frac{1}{1-a} \right)^s = \frac{a}{1-a} \cdot (1-a)^s = a(1-a)^{s-1},$$

который полностью соответствует (29) при $s = n - j$.

Пример 5. В условиях примера 1 имеют место следующие соотношения:

$$r_{nj} = r_{n-j} = a - 1, \; k_{nj} = k_{n-j} = \frac{a-1}{a} \cdot a^{-n} a^j. \quad (30)$$

Отсюда

$$R(z) = (a-1) \frac{z}{z-1}.$$

Согласно (26)

$$K(z) = \frac{R(z)}{1 + R(z)} = \frac{a-1}{a} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{a}},$$

используя обратное преобразование, получим окончательный результат

$$Z^{-1}\left\{K\left(z\right)\right\} = \frac{a-1}{a} \cdot a^{-s},$$

который полностью соответствует (30) при $s = n - j$.

Для оценки полученных результатов по обобщению решений указанных типов дискретных аналогов интегральных уравнений Вольтерра II рода и исследованию новых их решений использованы программные средства пакета Symbolic Math Toolbox Matlab 6.5, который базируется на применении ядра символьной математики системы компьютерной алгебры Maple V R4 [9]. Приведенные выше утверждения и примеры проверены с использованием языка символической математики и полностью подтверждены.

Заключение

Предлагаемый подход к установлению решений дискретных аналогов некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра II рода на основе отыскания решений соответствующих уравнений, связывающих ядро и резольвенту, дает возможность исследовать новые классы решений таких уравнений и упростить алгоритмы численной реализации при таблично заданных входных данных, что определяет существенные преимущества предлагаемых моделей при решении прикладных задач. Перспективы дальнейших исследований связаны с расширением круга возможных типов интегральных уравнений Вольтерра II рода и их дискретных аналогов, для которых могут быть получены аналитические решения.

Литература

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики / Смирнов В.И. – М. : Наука, 1974. – Т. 4, ч. 1. – 336 с
2. Забрейко П.П. Интегральные уравнения / Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. – М. : Наука, 1968. – 448 с
3. Верлань А.Ф. Справочник по интегральным уравнениям / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К. : Техника, 1986. – 700 с.
4. Иванов В.В. Методы вычислений на ЭВМ / Иванов В.В. – К. : Наук. думка, 1986. – 584 с.
5. Верлань А.Ф. Моделирование систем автоматического управления с реальными обратными связями на основе интегро-дифференциальных уравнений Вольтера / А.Ф. Верлань, В.Ф. Миргород, Д.Э. Контрерас // Тр. Одесск. гос. политехн. ин-та. – 2000. – Вып. 3(12). – С. 120-123.
6. Миргород В.Ф. Квадратурно-разностные алгоритмы моделирования нелинейных динамических объектов / В.Ф. Миргород, Д.Э. Контрерас, А.Б. Волощенко // Сб. научн. тр. ИПМЭ НАН Украины «Моделирование и информационные технологии». – 2000. – Вып. 6. – С. 152156.
7. Миргород В.Ф. Обобщение методов аналитического решения некоторых типов интегральных уравнений Вольтерра второго рода / В.Ф. Миргород // Искусственный интеллект. – 2009. – № 3. – С. 68-80.
8. Миргород В.Ф. Эквивалентные преобразования интегральных и дифференциальных математических моделей / В.Ф. Миргород, И.М. Гвоздева // Материалы международной научной конференции «Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта», (Евпатория, 18 – 22 мая 2009 г.). – 2009. – Т. 1. – С. 88-91.
9. Дьяконов В.П. Matlab 6.0 : учебный курс / Дьяконов В.П. – СПб. : Питер, 2001. – 592 с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Камке Э. – М. : Наука, 1971. – 576 с.

Literatura

1. Smirnov V.I. Kurs vysshej matematiki. T. 4. Ch. 1. M. : Nauka. 1974. 336 s.
2. Zabrejko P.P. Integral’nye uravnenija. M. : Nauka. 1968. 448 s.
3. Verlan’ A.F. Spravochnik po integral’nym uravnenijam. K. : Tehnika. 1986. 700 s.
4. Ivanov V.V. Metody vychislenij na JeVM. K. : Nauk. dumka. 1986. 584 s.

5. Verlan' A.F. Tr. Odessk. gos. politehn. in-ta. Vyp. 3 (12). 2000. S. 120-123.
6. Mirgorod V.F. Sb. nauchn. tr. IPMJe NAN Ukrainy "Modelirovanie i informacionnye tehnologii". Vyp. 6. 2000. S. 152-156.
7. Mirgorod V.F. Iskusstvennyj intellekt. 2009. № 3. S. 68-80.
8. Mirgorod V.F. Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Intellektual'nye sistemy prinjatija reshenij i problemy vychislitel'nogo intellekta", (Evpatorija, 18 – 22 maja 2009 g.). 2009. T. 1. S. 88-91.
9. D'jakonov V.P. Matlab 6.0: uchebnyj kurs. SPb. : Piter. 2001. 592 s.
10. Kamke Je. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam. M. : Nauka. 1971. 576 s.

В.Ф. Миргород, І.М. Гвоздева

Дискретні аналоги інтегральних рівнянь Вольтера ІІ роду

У статті пропонується клас математичних моделей процесів у лінійних системах з фіксованими станами. Такі математичні моделі є дискретними аналогами інтегральних рівнянь Вольтера ІІ роду. Розглянуті методи аналітичного розв'язання запропонованих рівнянь на основі відшукання рішень відповідних рівнянь, що пов'язують ядро та резольвенту. Розглянута та доведена теорема, що встановлює аналітичний вигляд резольвенти за заданим ядром для низки важливих окремих випадків, а саме при сепарабельному вигляді ядра. Розглянуті еквівалентні перетворення пропонованих математичних моделей до лінійних різницевих рівнянь.

V.F. Mirgorod, I.M. Gvozdeva

The Discrete Analogues of Volterra Integral Equations of the Second Kind

The class of mathematical models of processes in the linear systems with the fixed states is offered in the paper. Such mathematical models are the discrete analogues of Volterra integral equations of the second kind. The methods of analytical solutions of the offered equations on the basis of finding of solutions of corresponding equations binding the kernel and resolvent are considered. The theorem, defining the analytical kind of resolvent on the given kernel for some important special cases, namely at the separable type of kernel, is considered and proved. Equivalent transformations of the offered mathematical models to the linear difference equations are considered.

Статья поступила в редакцию 12.07.2011.